Segundo Parcial

1/2021

5

1. Hallar la circulación del campo $\bar{f}(x;y;z) = (x^2z\,;\ y^2\,;\ z^2)$ a través de la curva C definida por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 4\ \cap\ x + y + 2z = 2$. Indicar en un gráfico el sentido en que recorre la curva

2. Sea $\bar{f}(x;y) = (x + y; \varphi(x) - y)$ con $\varphi \in C^1$ determinar a) $\varphi(x)$ para que $\bar{f}(x;y)$ sea un campo de gradiente con la condición $\bar{f}(2;1) = (3;1)$ b)la línea de equipotencial que pasa por el punto (2;3)

3. Calcular el área de la porción de paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ **limitado por** $\boldsymbol{z \geq 1}$; $\boldsymbol{y \geq |x|}$

4. Hallar el volumen del sólido definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\,; z \geq x^2 + y^2\,; x \geq 0\,; y \geq 0$

5. **a) Enunciar el teorema de Green b) dar expresiones para $\bar{f} = (P;Q)$ tal que $A(D) = -\frac{1}{2}\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{g}$ donde $A(D)$ es el área del recinto plano D; y la circulación sobre la frontera del recinto plano recorrida en el sentido +**

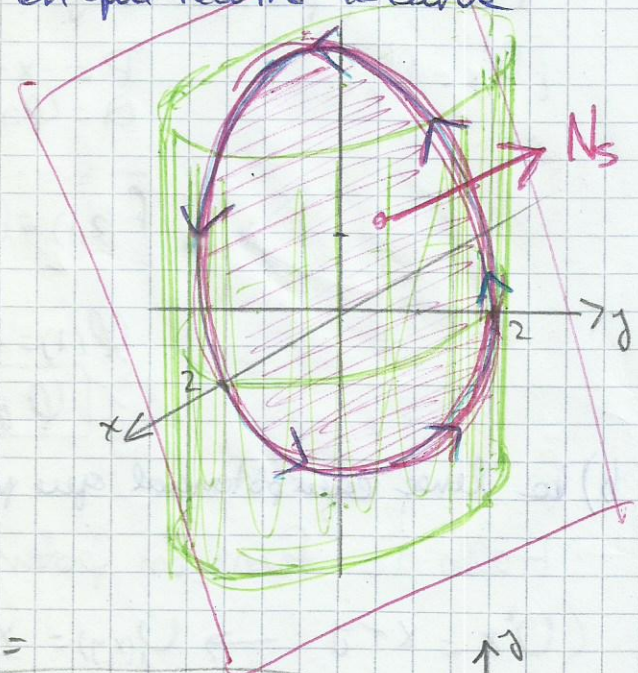
6. **a) Indicar las hipótesis suficientes para cambio de variables en una integral doble y dar su expresión b) Mediante un cambio de variables convenientes exprese y calcule la integral $\iint_D f(x;y)dxdy$ donde $D = \{(x;y) \in R^2/1 \leq x + y \leq 2\ \wedge 0 \leq y - x \leq 1\}$; $f(x;y) = k$ con el cálculo de solo una integral doble**

(resuelto por Sylvina)

AM2	2° parcial	Nov /21
	prof. Hernandez	N3

① Hallar la circulación de $\bar{F}(\bar{X}) = (x^2 z ; y^2 ; z^2)$ a través de la curva C definida por la intersección de las sups $x^2+y^2=4$ ∩ $x+y+2z=2$
Indicar en un gráfico el sentido en que recorre la curva

$$C: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$



C es una curva cerrada y suave

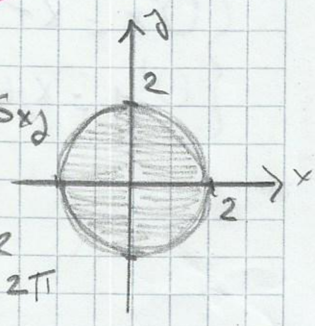
S es la porción del plano $x+y+2z=2$ que está contenida por C.
→ sup. orientable

$\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicas)

$\Rightarrow$ T. Stokes $\rightarrow \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{s}$

$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$

$= (0-0,\ x^2-0;\ 0-0) \rightarrow \boxed{\text{rot}(\bar{F}) = (0, x^2, 0)}$



$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$

$0 \leq r \leq 2$
$0 \leq t \leq 2\pi$

$G(xyz) = x+y+2z-2$

$\nabla G(xyz) = (1,1,2) \rightarrow N = \frac{\nabla G}{|G'_z|}$

$\rightarrow N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(\bar{F})\, N\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (0, x^2, 0)(1/2, 1/2, 1)\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \frac{x^2}{2}\, dx\,dy$

C.V.

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \overset{\text{Jac}}{r}\, \underbrace{r^2\cos^2(t)}_{x^2}\, dr\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,dt \underbrace{\int_0^2 r^3\,dr}_{4} = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot 4$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = 2\pi}$$

(resuelto por Sylvina)

② Sea $f(x;y) = (x+y\ ;\ \varphi(x) - y)$ con $\varphi \in C^1$. Determinar:

a) $\varphi(x)$ para que $f(x;y)$ sea un campo (conservativo) de gradiente con la condición $f(2;1) = (3;1)$

$Dom(f) = \mathbb{R}$ ✓

$\bar{f} \in C^1$ (polinomios y $\varphi \in C^1$) ✓ $\qquad \bar{f} = (P;Q)$

¿$Q'_x = P'_y$? $\qquad P = x+y \qquad Q = \varphi(x) - y \rightarrow \begin{cases} P'_y = 1 \\ Q'_x = \varphi'(x) \end{cases} \rightarrow$ quiero que $\varphi'(x) = 1$

$\varphi(x) = x + C \quad C \in \mathbb{R}$

$\bar{f}(2;1) = (3;1) = (\overbrace{2+1}^{3}\ ,\ \overbrace{\varphi(2) - 1}^{1})$

$2+1 = 3$ ✓

$\varphi(2) - 1 = 1 \Rightarrow \varphi(2) = 2$

$\varphi(2) = 2 = 2 + C \rightarrow C = 0$

$$\boxed{\varphi(x) = x}$$

b) La línea equipotencial que pase por $(2;3)$

Hallo la función potencial U / $\bar{f} = \nabla U$

$\bar{f}(x;y) = (x+y\ ,\ x-y)$

$\begin{cases} U'_x = x+y \rightarrow U_1(x;y) = \frac{x^2}{2} + xy + \alpha(y) \\ U'_y = x-y \rightarrow U_2(x;y) = xy - \frac{y^2}{2} + \beta(x) \end{cases}$

$$\boxed{U(x;y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C}$$

líneas equip: $\boxed{\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = k}$

pasa por $(2;3) \rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix} \rightarrow \frac{2^2}{2} + 2 \times 3 - \frac{3^2}{2} = k = \frac{7}{2}$

$$\boxed{l.e.: \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = \frac{7}{2}}$$

$\equiv$

$$\boxed{l.e.: x^2 + 2xy - y^2 = 7}$$

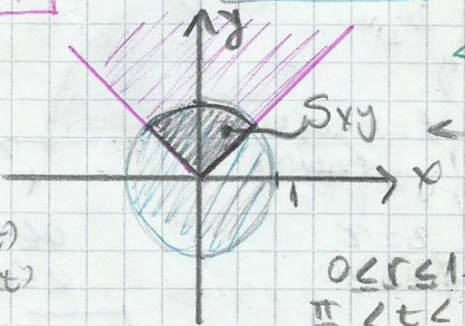
AM2	2° parcial	Nov/21
	Prof. Hernández	2/3

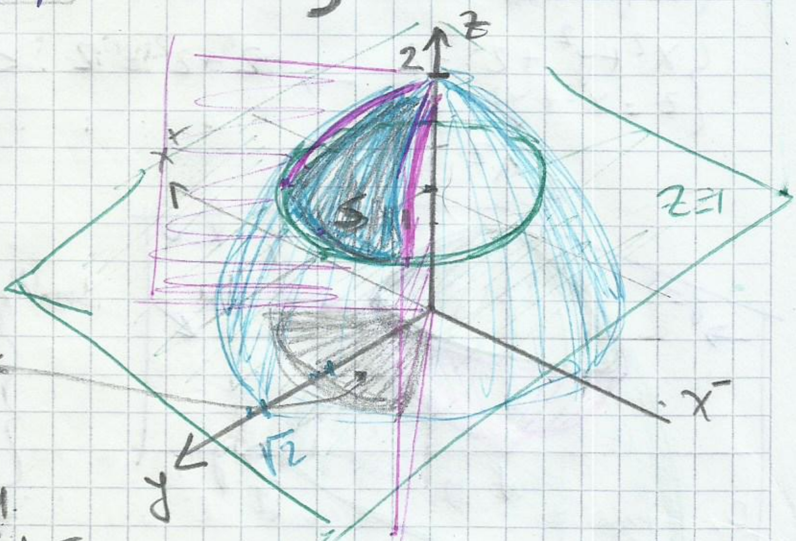
③ Calcular el área de la porción del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ limitado por $z \geq 1$, $y \geq |x|$

S

Hallo la intersección

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z \geq 1 \\ \boxed{y \geq |x|} \end{cases} \quad 2 - x^2 - y^2 = 1 \quad \boxed{x^2 + y^2 = 1}$$





$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

$0 \leq r \leq 1$

$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$

$S: z = 2 - x^2 - y^2 \qquad G_{(x,y,z)} = x^2 + y^2 + z - z$

$N_S \quad // \quad \nabla G \qquad \nabla G_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 1)$

uso $N = \frac{\nabla G}{|G'_z|} \rightarrow \boxed{N = (2x, 2y, 1)}$

$\|N\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

$$A_S = \iint_S ds = \iint_{S_{xy}} \|N\|\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dx\,dy =$$

$$\overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{r}_{Jac} \sqrt{4r^2+1}\, dr\, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{2\pi} \cdot \int_0^1 r\sqrt{4\left(r^2 + \tfrac{1}{4}\right)}\, dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^1 r\sqrt{r^2 + 1/4}\, dr = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt{(r^2 + 1/4)^3} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \underbrace{\left(\sqrt{\left(\tfrac{5}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^3} \right)}_{\left(\frac{5\sqrt{5}}{\cancel{8}_2} - \frac{1}{\cancel{8}_2}\right)}$$

$$\boxed{A_S = \left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \right) \pi}$$

(resuelto por Sylvina)

esfera radio $\sqrt{2}$

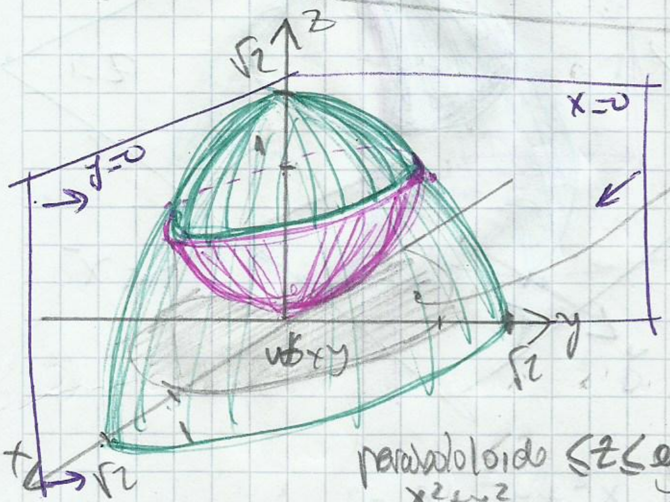
2e) Hallar el volumen del sólido definido por

$$W: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 2 \\ z \geq x^2+y^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$z \geq 0$

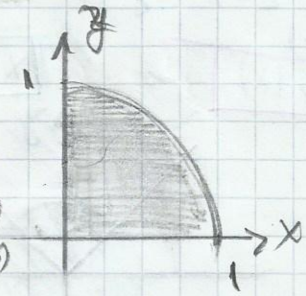
Hallo la intersección entre la esfera y el paraboloide para analizar la proyección

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow z+z^2 = 2 \quad \begin{matrix} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \\ z \geq 0 \end{matrix} \rightarrow \boxed{x^2+y^2 = 1}$$



W_{xy}

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$$



$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq t \leq \pi/2$

paraboloide $\leq z \leq$ esfera $\quad r^2 \leq z \leq \sqrt{2-r^2}$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \qquad \sqrt{2-x^2-y^2}$$

$$\text{Vol}_W = \iiint_W d\text{vol} \overset{CV}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} \overset{\text{Jac}}{r}\, dz\, dr\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt \int_0^1 r\left(\sqrt{2-r^2}-r^2\right) dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\, dr - \int_0^1 r^3\, dr\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(2-r^2)^3}\,\Big|_0^1 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{2^3}\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-1+2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{-4+8\sqrt{2}-3}{12}\right)$$

$$\boxed{\text{Vol}_W = \frac{(8\sqrt{2}-7)}{24}\pi}$$

(resuelto por Sylvina)

AM2	2° parcial	No/21
	prof. Hernandez	3/3

5) a) Enunciar el teorema de Green

D es una región compacta de $\mathbb{R}^2$

C es una curva suave y cerrada, frontera de D

$\bar{F}=(P,Q)$ $\quad \bar{F} \in C^1 \quad \longrightarrow \quad \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$

b) Dar expresiones para $\bar{F}=(P,Q)$ tal que $A(D) = -\frac{1}{2}\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{g}$ donde $A(D)$ es el área del recinto plano D, la circulación sobre la frontera del recinto plano recorrido en sentido +

por T. Green: $\quad \oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$

$$A_D = \iint_D 1\, dx\,dy$$

Para dar expresiones de $\bar{F}$ analizo qué $\bar{F}$ cumple de:

$$\iint_D dx\,dy = -\frac{1}{2}\oint_{C^+} \bar{F} d\bar{l}$$

$$\underbrace{-2\iint_D dx\,dy}_{\boxed{Q'_x - P'_y = -2}} = \oint_{C^+} \bar{F} d\bar{e}$$

Busco $\bar{F}$ / $\begin{matrix} Q'_x = -1 \\ P'_y = -1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Q = -x \\ P = y \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\bar{F}(x,y) = (y, -x)}$

" $\bar{F}$ / $\begin{matrix} Q'_x = -2 \\ P'_y = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Q = -2x \\ P = 0 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\bar{F}(x,y) = (0, -2x)}$

(resuelto por Sylvina)

⑥ a) Indicar las hip. suficientes para cambio de variables en una integral doble y dar su expresión

Sean D y D^* dos regiones del plano

$T: D^* \to D$ una transformación lineal C^1

$\bar{T}(D^*) = D$

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

Entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\bar{T}(u,v)) \cdot |J|\,du\,dv$$

$$|J| = \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}_{\text{de } dx\,dy \text{ a } du\,dv} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}$$ de $du\,dv$ a $dx\,dy$

b) Mediante un cambio de variables convenientes expresar y calcular la integral

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

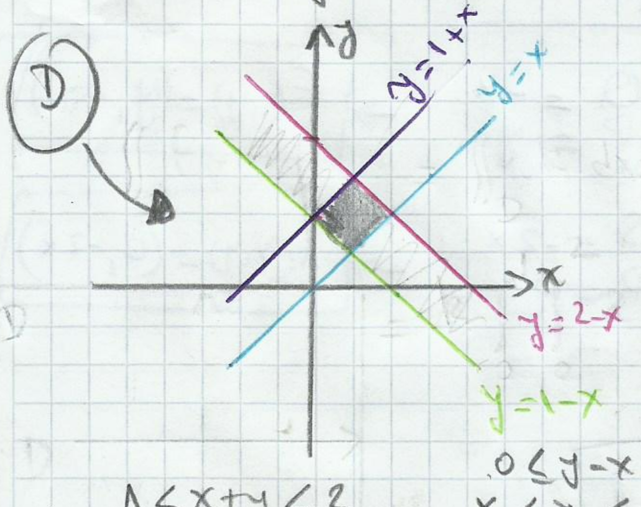
donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq \underbrace{x+y}_{u} \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq \underbrace{y-x}_{v} \leq 1\}$

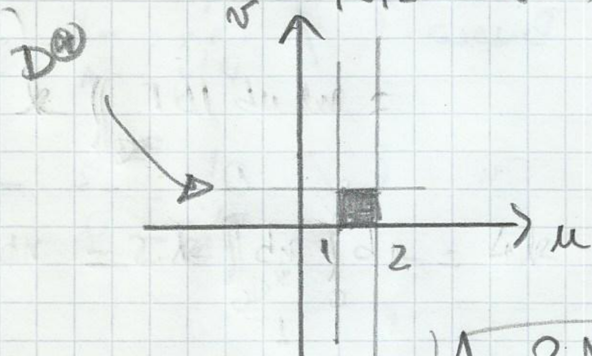
$f(x,y) = k$ con el cálculo de solo una integral doble

$1 \leq u \leq 2$
$0 \leq v \leq 1$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= x+y \\ v(x,y) &= y-x \end{aligned}\right\} \to J = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|J| = 1 \cdot 1 - (1 \cdot (-1)) = 2$





$\boxed{A_D = 2 A_{D^*}}$

$1 \leq x+y \leq 2$
$1-x \leq y \leq 2-x$

$0 \leq y-x \leq 1$
$x \leq y \leq 1+x$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D k\,dx\,dy \overset{\text{c.v.}}{=} k \iint_{D^*} |J|\,du\,dv = k \int_1^2 \int_0^1 2\,dv\,du = 2k \underbrace{\int_1^2 du}_{1} \underbrace{\int_0^1 dv}_{1} = 2k$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2k}$$

(resuelto por Sylvina)